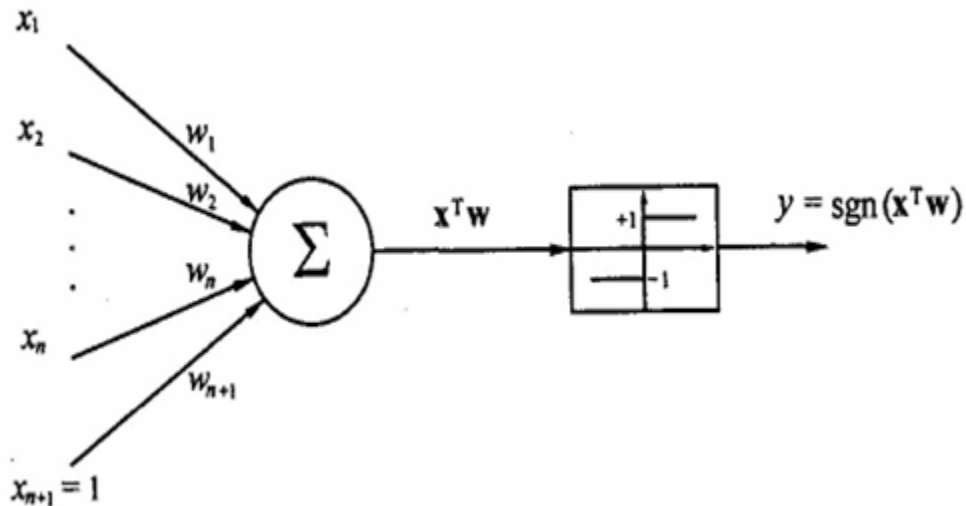


Laborator 4

Utilizarea unei rețele cu un singur neuron (rețea de tip perceptron) pentru rezolvarea problemelor de clasificare liniar separabile.

O rețea de tip perceptron are reprezentarea de mai jos:



Presupunem că se dă o mulțime de antrenare a perceptronului, adică o mulțime de forma:

$$S_m = \{(x^1, d^1), (x^2, d^2), \dots, (x^m, d^m)\},$$

unde x^i este un vector de intrare al rețelei de forma $[x_1, \dots, x_{n+1}]^T$, iar d^i reprezintă ieșirea target asociată intrării x^i și poate lua valorile $\{-1, 1\}$, deci poate fi privit ca un clasificator în două clase. Intrarea x_{n+1} este adesea setată 1 și ei îi este asociată un bias (deplasare) care poate fi considerat de asemenea ca o pondere a intrării x_{n+1} .

Notăm cu w vectorul $w = [w_1, \dots, w_{n+1}]^T$ constând în parametrii rețelei. Relația intrare/ieșire este dată de $Y = \text{sgn}(x^T w)$.

Scopul este ca pentru fiecare vector de intrare x^k ieșirea Y^k să se potrivească cu ieșirea dorită d^k . În acest caz spunem că perceptronul clasifică corect mulțimea de antrenare.

A găsi un perceptron care să clasifice corect mulțimea de antrenare înseamnă a găsi un vector w^* astfel încât să fie satisfăcute relațiile:

$$\begin{cases} (x^k)^T w^* > 0 & \text{dacă } d^k = 1 \\ (x^k)^T w^* < 0 & \text{dacă } d^k = -1 \end{cases}$$

Să observăm că mulțimea punctelor x care satisfac ecuația $(x^k)^T w^* = 0$ formează un hiperplan în \mathbb{R}^{n+1} . Deci, a găsi o soluție w^* a sistemului de mai sus înseamnă a determina un hiperplan care separă spațiul intrărilor x^k , $k = \overline{1, n}$ în două mulțimi disjuncte, una conținând punctele x^k pentru care $d^k = 1$, iar cealaltă conținând punctele x^k pentru care $d^k = -1$.

O posibilă metodă incrementală pentru a găsi o soluție w^* este regula de învățare a lui Rosenblatt:

$$\begin{cases} w^1 \text{ arbitrar} \\ w^{k+1} = w^k + d^k x^k & \text{dacă } d^k \neq Y^k \\ w^{k+1} = w^k & \text{altfel} \end{cases}$$

La început, se selectează vectorul ponderilor w^1 aleator, apoi utilizând succesiv perechile (x^k, d^k) ale mulțimii de antrenare se modifică succesiv vectorul ponderilor pentru a găsi soluția w^* care să clasifice corect mulțimea de antrenare.

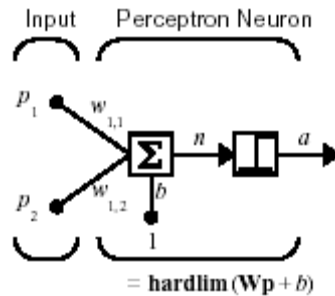
De obicei, sunt necesare mai multe cicluri (epoci), adică parcurgerea în întregime a mulțimii de antrenare, până când eroarea, determinată de diferențele dintre ieșirile rețelei și ieșirile dorite, va fi zero.

În cazul perceptronilor, există vectorul w^* dacă și numai dacă mulțimea de antrenare este liniar separabilă (i.e. există un hiperplan care să clasifice corect punctele din mulțimea de antrenare).

Din punctul de vedere al liniar separabilității, funcțiile booleene OR (disjuncția) și AND (conjunția) corespund unor probleme liniar separabile, pe când funcția XOR (disjuncția exclusivă) corespunde unei probleme neliniar separabile.

În exercițiul următor vom considera mulțimea de antrenare formată din puncte din plan. Deci ne propunem să determinăm o dreaptă care să clasifice corect aceste puncte.

Dacă avem două clase de date liniar separabile, atunci perceptronul poate fi antrenat pentru a clasifica corect date din aceste clase. Să considerăm punctele din plan $x^1 = (1,1)$, $x^2 = (-1,1)$, $x^3 = (-1,-1)$, $x^4 = (1,-1)$ împărțite în 2 clase liniar separabile (de exemplu $\{x^1, x^4\}$ din clasa codificată cu 1 și $\{x^2, x^3\}$ din clasa codificată cu -1).



Algoritmul de antrenare a perceptronului este următorul:

intrare: $S_m = \{(x^1, d^1), (x^2, d^2), \dots, (x^m, d^m)\}$ (în exemplul nostru $m = 4$)

initializare: $w_{1,1}, w_{1,2}, b$ primesc valori aleatoare uniform distribuite în intervalul (0, 1);

pentru un număr de epoci repetă

for $i=1:m$

$n = w * x_i$ % unde $w = [w_{1,1}, w_{1,2}, b]$, $x_i = \left[\begin{matrix} (x^i)^T \\ 1 \end{matrix} \right]^T$

if $n > 0$ $Y = 1$;

else $Y = -1$;

end

if $(d^i \neq Y)$ $w = w + d^i * (x_i)^T$; % minimizarea erorii

end

end

end

ieșire: vectorul w

Exercițiu: Să se reprezinte grafic dreapta de separare a punctelor și punctele din mulțimea de antrenare folosind simboluri diferite pentru puncte din clase diferite. Să se interpreteze rezultatele.